

Systèmes linéaires, polynômes, relations de comparaison

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.
 Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

1 Pour s'échauffer

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Résoudre en discutant selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = m \end{cases}$$
- 2) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de : $F = \frac{X^7}{X^4 + 2X^2 + 1}$
- 3) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de : $F = \frac{1}{(X^2 + 2X + 1)(X^2 + 2X - 1)}$.

2 Des équivalents sur des sommes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

Dans cet exercice, on souhaite démontrer le résultat suivant : si $u_n \sim v_n$ et si $V_n \rightarrow +\infty$, alors $U_n \sim V_n$.
 On fixe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$h_n = \frac{u_n}{v_n} - 1$$

- 1) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|h_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- 2) Justifier qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$\left| \frac{h_0 v_0 + \dots + h_{N-1} v_{N-1}}{V_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- 3) En exprimant u_n en fonction de v_n et h_n , montrer qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $\left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$.
- 4) En déduire le résultat voulu. *Note : on admet dans la suite que ce résultat est encore valable si les suites (u_n) et (v_n) ne sont définies que sur $\mathbb{N}^*$.*
- 5) Application : déterminer un équivalent simple de $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Application : en déduire un équivalent simple de U_n pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes :

$$u_n = \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \quad u_n = \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\ln(n+1)}$$

7) Avec un contre-exemple, montrer que le résultat de cet exercice tombe en défaut sans l'hypothèse « $V_n \rightarrow +\infty$ ».

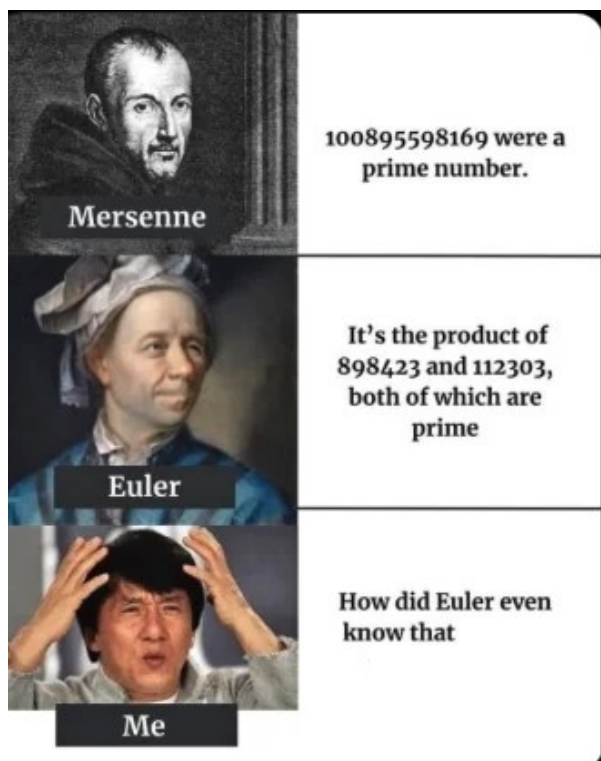
3 Deux exercices indépendants sur les polynômes

1) Soit $n \geq 2$ un entier et $P = X^n - X + 1$. Montrer que toutes les racines de P sont simples.

2) Montrer que pour tous $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ divise le polynôme

$$Q = X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$$

(en anglais, « prime number » signifie « nombre premier »)



source : [reddit/mathmemes](https://www.reddit.com/r/mathmemes)